

# Paolo Zellini: La dittatura del calcolo

## *Una discussione critica*

FRANCESCO GUSMANO

*Saggista, filosofo.*

gusmanof@gmail.com

DOI: 10.57610/cs.v4i8.175

**Abstract:** Paolo Zellini, a mathematician by profession, supports the thesis of a domination of algorithms in contemporary society. The reasons for this domination – an authentic dictatorship – are to be traced not so much, or not only, in the usefulness that these calculation procedures offer but, above all, in the connection that exists a) with the foundational research in mathematics developed at the turn of the nineteenth and of the twentieth century and b) with the symbolic meanings that numbers and algorithms have had in the ancient philosophical and wisdom traditions. In this paper we try to show that the arguments proposed by Zellini are not effective. For two reasons: a) the attempt to identify in the work of the mathematician Richard Dedekind the development of an algorithmic procedure capable of capturing the actual infinite is not convincing and b) the ontology of algorithms proposed by Zellini is not convincing because it does not take into account the theoretical results achieved by John Searle's social ontology and Robert Brandom's post-Wittgensteinian and post-Sellarsian inferentialist pragmatism.

**Keywords:** algorithms, infinite, ontology, consciousness

**Riassunto:** Paolo Zellini, matematico di professione, sostiene la tesi di un dominio degli algoritmi nella società contemporanea. Le motivazioni di questo dominio – una autentica dittatura – sono da rintracciare non tanto, o non soltanto, nell'utilità che tali procedure di calcolo offrono quanto, soprattutto, nella connessione che sussiste a) con le ricerche fondazionali in matematica sviluppatesi a cavallo del XIX e del XX secolo e b) con i significati simbolici che numeri e algoritmi hanno avuto nelle antiche tradizioni filosofiche e sapienziali. In questo scritto si cerca di far vedere che gli argomenti proposti da Zellini non sono efficaci. Per due ordini di ragioni: a) non convince il tentativo di individuare nell'opera del matematico Richard Dedekind la messa a punto di una procedura algoritmica capace di catturare l'infinito attuale e b) non convince l'ontologia degli algoritmi proposta

da Zellini, perché non tiene conto dei risultati teoretici raggiunti dall'ontologia sociale di John Searle e dal pragmatismo inferenzialista post-wittgensteiniano e post-sellarsiano di Robert Brandom.

**Parole chiave:** algoritmi, infinito, ontologia, coscienza

## 1. Introduzione

*La dittatura del calcolo* (Adelphi, Milano, 2018, pp. 186) è un libro complesso, stratificato, denso di erudizione. Paolo Zellini – studioso che, ormai da molti anni, affianca all'attività professionale di matematico un costante lavoro di riflessione storico-epistemologica su fondamenti e significato della matematica – vi sostiene la tesi che le società occidentali avanzate stiano sperimentando nell'attuale fase storica una condizione di pericoloso assoggettamento al predominio degli algoritmi. La diffusione di queste specifiche procedure di calcolo è un elemento costitutivo dell'attuale realtà sociale in cui sempre più numerosi sono i settori regolati da dispositivi elettronici. Zellini ravvisa in questo i segni di un dominio incombente, la possibilità che in un futuro non troppo remoto la libertà degli individui potrebbe risultare del tutto annullata dal potere dispotico delle macchine calcolanti. L'originalità del lavoro non risiede tuttavia nella tesi del dominio algoritmico in quanto tale – tesi, peraltro, non del tutto estranea alla letteratura sull'argomento<sup>1</sup> – ma nella struttura argomentativa che la sorregge. La ragione di questo stato di cose andrebbe cercata secondo Zellini non tanto, o soltanto, nelle soluzioni che gli algoritmi offrono ai numerosi problemi della vita quotidiana – dunque nel loro successo *pratico* – quanto piuttosto nel nesso fondamentale che sussisterebbe tra riflessione sui fondamenti della matematica e sviluppo della scienza del calcolo: le procedure *finite* del calcolo traggono origine dalla riflessione intorno al concetto di *infinito*, il che giustifica la loro autorità e la loro natura intrinsecamente dispotica.

Questo discorso, che si sviluppa in un ambito prettamente logico-matematico, viene inserito all'interno di una cornice di carattere mistico-sapienziale. Contare oggetti, enumerare individui, censire popolazioni sono attività che hanno assunto, nelle tradizioni mitico-religiose, uno specifico valore metafisico. I numeri e le figure geometriche sono stati pensati come entità connesse con la sfera divina. Anche gli algoritmi possiedono un analogo valore simbolico, sono processi logico-numeriche che rimandano ai calcoli e alle enumerazioni in

1. Si vedano, solo come esempio: F. Pasquale, *The Black Box Society*; N. Bostrom, *Superintelligenza*; V. Barassi, *I figli dell'algoritmo*.

uso presso gli antichi popoli; portano addosso come dei segni di potenze divine invisibili, e sembrano avvolti quasi da un'aura di sacralità. Senza tenere presenti queste componenti simboliche – sostiene Zellini – non si può comprendere adeguatamente il loro dominio sociale.

Nelle pagine che seguono si cercherà di mostrare che la tesi principale, oltre a non essere corroborata da evidenze empiriche (la *presenza* diffusa degli algoritmi non sembra implicare il *dominio* di essi sulla società), non appare sostenibile neanche in base alle specifiche motivazioni addotte da Zellini: dal nesso – effettivo ma indiretto – tra riflessione sul problema dei fondamenti e sviluppo della scienza del calcolo non sembra doversi *necessariamente* ricavare il carattere oracolare e dispotico degli algoritmi. In secondo luogo, anche ammettendo la sussistenza di risonanze mistiche connesse ai calcoli algoritmici, il loro diffuso predominio presupporrebbe, per essere veramente tale – per essere cioè dominio *concreto* –, un altrettanto diffuso *riconoscimento* di tali significati simbolici da parte della società nel suo complesso. Uno scenario che appare ben poco verosimile, vista la complessità e il carattere specialistico delle conoscenze implicate.

## 2. *Origini e sviluppo del dominio algoritmico*

La pericolosità sociale degli algoritmi si fonda sulla loro misteriosa efficienza. I risultati pratici suscitano stupore e ammirazione ma la “delega decisionale”, ovvero sia il tratto decisivo, si dà nel momento in cui queste procedure di calcolo vengono innalzate al rango di oracoli sacri. Qui, a questo livello, avviene l'*abdicazione della libertà umana* in favore di calcoli oscuri e invisibili. Decisivo dunque diventa, nell'economia del discorso di Zellini, mostrare il carattere *sacrale* e al tempo stesso *esoterico* degli algoritmi. Le linee argomentative principali sono due. La prima consiste nel far vedere che gli algoritmi sono implicati nella riflessione matematica sul concetto di infinito, un concetto matematico che sembra collegarsi, in modo quasi naturale, alla dimensione religiosa. La seconda linea mira a far emergere le risonanze mistiche che costituiscono la vera origine della loro forza persuasiva e del loro carattere dispotico.

### 2.1 *Gli algoritmi e l'infinito. Dedekind e il concetto di somma*

Zellini vuole fare risaltare la connessione della nozione di algoritmo con il concetto di infinito. Questa mossa è centrale nell'economia generale del suo discorso poiché la nozione di infinito, pur circoscritta all'ambito matematico, possiede sfumature semantiche che rimandano alla sfera trascendente/religiosa – basti solo ricordare un matematico come Hilbert che definiva la teoria degli

insiemi “il *paradiso* che Cantor ha creato per noi”. Perciò, in quanto prodotto del lavoro teorico sul concetto di infinito, gli algoritmi sono per forza di cose intrisi di quella stessa dimensione religiosa che è propria del “concetto-madre”. Il luogo cruciale per illustrare questa connessione viene individuato nella definizione della funzione somma presentata da Richard Dedekind nel 1888 nel suo famoso saggio sui numeri naturali *Was sind und was sollen die Zahlen?*<sup>2</sup> Qui Dedekind, attraverso l’uso combinato di principio di induzione, funzione ricorsiva e – secondo Zellini – metodo diagonale, riesce a costruire una *funzione unica* che raccogliendo tutte le operazioni ricorsive giunge a realizzare, come *unica operazione*, la somma di due numeri naturali qualsiasi. Nell’interpretazione di Zellini, con questa mossa il matematico tedesco realizza un metodo algoritmico – probabilmente il primo – per “catturare” l’infinito attuale.

Come accennato, le premesse teoriche per la definizione della funzione che opera la somma sull’insieme  $N$  sono l’induzione e la ricorsività (rispettivamente teorema n. 80 e teorema n. 126). L’induzione presuppone un altro concetto fondamentale introdotto da Dedekind, quello di *catena* (*Kette*: definizione n. 37). Un insieme  $K$  si definisce una catena quando sussistono due condizioni:

- a. c’è un’autoapplicazione (*Selbstabbildung*), chiamiamola  $S$ , che opera una trasformazione su  $K$  e produce elementi che stanno ancora in  $K$ ;
- b. il prodotto della trasformazione indotta da  $S$  è  $K'$ , un sottoinsieme di  $K$ .

A sua volta,  $K'$  è anch’esso una catena, come catene sono le unioni e le intersezioni di catene (proposizioni n. 42 e n. 43).

Con questa nozione di catena, come giustamente è stato osservato<sup>3</sup>, Dedekind rende rigorosa la costruzione dei numeri naturali, fornendo una versione logico-insiemistica del sistema creato da Peano.

Questo processo è alquanto evidente proprio prendendo in considerazione il concetto di somma. La prima bozza di *Was sind und was sollen die Zahlen* risale al 1872<sup>4</sup>. Qui ancora Dedekind sembra incerto. L’impostazione è quella di costruire i numeri partendo da 1 mediante un ‘atto+1’. Tuttavia, nel finale arriva a una formulazione più astratta. Considera l’addizione come funzione a due argomenti e la scrive come:

2. Cfr. S. Müller-Stach (Hrsg.), R. Dedekind, *Was sind und was sollen die Zahlen? – Stetigkeit und Irrationale Zahlen*.

3. Si vedano, fra gli altri, S. Müller-Stach, cit., pp. 153-156 e G. Lolli, *Dedekind filosofo della matematica*.

4. Cfr. G. Lolli, cit. pp. 10-11.

$$\varphi(a, d(b)) = d\varphi(a, b)$$

$$\varphi(a, 1) = d(a)$$

Scompare il riferimento all'atto di aggiungere 1 e al suo posto fa la sua comparsa una funzione  $d: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  che permette di generare la successione dei numeri naturali (la funzione successore). La mossa è decisiva perché in tal modo si esce dal rischio di circolarità di definire la somma per mezzo di una somma (l'atto+1) e si ottiene la definizione che si ritroverà poi nella versione definitiva del 1888, dove però saranno esplicitate le "premesse" logico-insiemistiche sui cui si regge la definizione (il concetto di catena, il teorema di induzione e il teorema di ricorsività). Infatti, nella *Erklärung* n. 135 la somma è così definita:

$$\text{I) } m + 1 = m'$$

$$\text{II) } m + n' = (m + n)'$$

Ora, non c'è dubbio che i costituenti del concetto di somma siano due, e Dedekind li indica espressamente nella nota al testo: il teorema n. 80 relativo all'*induzione completa* e il teorema n. 126, che Dedekind chiama di definizione per induzione ma che, nel linguaggio moderno, viene formulato come *teorema di ricorsività*<sup>5</sup>.

Zellini però va oltre, e propone un'interpretazione originale secondo la quale il testo di Dedekind autorizzerebbe una lettura diversa. Vi sarebbe un terzo elemento, che Dedekind decide di non rendere esplicito: il *metodo diagonale*.

Com'è noto, questa tecnica fu resa celebre da Cantor che la utilizzò per dimostrare la non numerabilità del continuo. Nelle sue diverse applicazioni (nella logica e nell'informatica) viene utilizzata come uno strumento per dimostrare i limiti inferiori di un sistema teorico (ad esempio, nel caso del problema della fermata si fa ricorso al metodo diagonale per far vedere che non esiste un algoritmo in grado di stabilire se una computazione termina in un numero finito di passi o non si arresta mai)<sup>6</sup>. Zellini ipotizza che Dedekind, pur presentando i suoi risultati in forma insiemistica, esponendosi al rischio di impredicatività, in realtà avesse in mente una formulazione della funzione somma mediante il metodo diagonale, usato però in questo caso non nel modo abituale, cioè limitativo, ma in funzione *generativa*.

5. Cfr. S. Müller-Stach, cit., p. 98.

6. Cfr. D. Harel, Y. Feldman, *Algoritmi*, pp. 250-252.

La definizione n. 135 ci dice che, scelto un elemento iniziale  $m$ , si definisce con  $m'$  il successore di  $m$ . Poi, preso un altro numero  $n$ , la somma  $m + n$  si ottiene mediante la combinazione di due funzioni ricorsive, la  $\varphi$ , cioè la funzione somma, e la  $d$ , la funzione successore. La somma di  $m$  con il successore di  $n$  è equivalente al successore della somma di  $m + n$ . Cioè:

$$m + (n + 1) = (m + n) + 1$$

La definizione rappresenta ricorsivamente la funzione somma ma l'algoritmo per ottenerla non viene esplicitato. Zellini suggerisce di procedere così (pp. 164-167). Definiamo le singole funzioni somma. Fissato  $m$ , fissiamo anche la funzione iniziale  $f_1(1) = m + 1$ . A questo punto, mediante una serie di passi induttivi, si arriva a  $m + n$ . Infatti avremo

$$f_1(1) = m + 1$$

$$f_2(2) = f f_1(1) = m + 1 + 1 = m + 2;$$

$$f_3(3) = f f f_1 = m + 1 + 1 + 1 = m + 3 \text{ e così via, fino ad arrivare a}$$

$$f_n(n) = f f f f f \dots f_1(1) = m + 1 + 1 + 1 + 1 \dots = m + n.$$

Come si può vedere, la somma si ottiene *reiterando* la funzione successore un numero di volte corrispondente (poniamo  $n$ ) a quello che intendiamo sommare al numero iniziale  $m$ . Ora, queste operazioni si possono rappresentare sinotticamente mediante la seguente tabella:

	1	2	3	4	5	n
$f_1$	<b>m + 1</b>					
$f_2$	m + 1	<b>m + 2</b>				
$f_3$	m + 1	m + 2	<b>m + 3</b>			
$f_4$	m + 1	m + 2	m + 3	<b>m + 4</b>		
$f_5$	m + 1	m + 2	m + 3	m + 4	<b>m + 5</b>	
–						
$f_n$	m + 1	m + 2	m + 3	m + 4	m + 5	<b>m + n</b>

Il vantaggio di questa rappresentazione consiste nel far vedere che mentre se si guarda alla serie delle  $f_n$  abbiamo l'impressione di un *infinito potenziale*, la funzione "conclusiva" che sta nella diagonale e riassume e calcola tutti i passaggi assume l'aspetto di un *infinito attuale*. Qualunque sia il valore di  $n$ , la  $f_n$  restituisce immediatamente, nella diagonale della tabella, il valore della somma  $m + n$ . Abbiamo ottenuto così una funzione che è a) *calcolabile* e che b) è in grado di racchiudere un *insieme infinito* di  $f_n$  generate mediante il procedimento induttivo. Dedekind perciò avrebbe implicitamente suggerito un algoritmo che permette di "catturare" l'infinito attuale mediante una funzione *totale* su  $\mathbb{N}$ . Si presentano però qui due criticità.

- a. Zellini insiste molto sul fatto che l'obiettivo di Dedekind è quello di arrivare a individuare un'unica funzione in grado di definire la somma. Il punto è che la caratterizzazione della funzione somma ottenuta mediante un uso *sui generis* del metodo diagonale non sembra raggiungere questo scopo: sulla diagonale non vi è un'unica funzione ma esattamente tante funzioni quante sono le  $f_n$  che si vogliono calcolare. Ciascuna  $f_n$  trova rappresentazione nella diagonale nella forma  $m + n$ , dunque se infinite sono le  $f_n$  infinite sono anche le realizzazioni  $m + n$  che "riassumono" le iterazioni, di grado inferiore, della funzione successore. Se  $n$  tende ad infinito allora anche la posizione  $m + n$  che rappresenta la  $f_n$  sulla diagonale si sposta *all'infinito* verso il lato destro della tabella *senza mai arrestarsi*. La "cattura" dell'infinito attuale mediante l'algoritmo della somma di cui parla Zellini semplicemente – e letteralmente! – non ha luogo. Il motivo fondamentale per cui procedimento di calcolo non conduce a una *chiusura* rispetto a  $\mathbb{N}$  risiede nel fatto che la funzione somma è null'altro che un'applicazione *ripetuta* della funzione successore, di quella funzione cioè che genera  $\mathbb{N}$  come successione infinita *non convergente*, cioè senza *limite superiore*. La funzione somma è sì una funzione *totale* – dato un numero  $m$  la funzione "varia" su tutto il dominio rappresentato da  $\mathbb{N}$  – ma la successione di numeri naturali che essa produce come *output* al variare di  $n$  è un infinito *potenziale*, cioè aperto e illimitato<sup>7</sup>.

---

7. Diverso il caso in cui la successione è convergente. In questo caso l'esito, dopo il passaggio al limite, è la creazione di un nuovo numero che si può considerare rappresentativo dell'intera successione. È questo il modo in cui Cantor costruisce i numeri reali come *limiti* di successioni convergenti di razionali. Un esempio potrebbe essere la successione di razionali costruita prendendo i parziali decimali di  $\pi$ : 3 3,1 3,14 3,141 3,1415 3,14159 3,141592... Continuando con l'aggiunta dei decimali si converge a  $\pi$  che però è un numero nuovo, irrazionale, che rappresenta il limite dell'intera successione, dunque un caso di infinito attuale. Cantor, com'è noto, usò lo stesso metodo estensivo per la creazione dei numeri transfiniti. Cfr. G. Cantor, *La formazione della teoria degli insiemi* p. 115.

- b. Il testo di Dedekind, come lo stesso Zellini del resto non manca di riconoscere (p. 48), non contiene riferimenti alla diagonalizzazione. Dedekind è animato da un intento di coerenza logica, vuol far vedere che, nella teoria dei numeri naturali, le strutture e le operazioni sulle strutture sono perfettamente coerenti. In particolare vuol far vedere che tutte le funzioni che operano su  $\mathbb{N}$ , singole e composte, sono funzioni *chiuse* rispetto a  $\mathbb{N}$ . Centrale, a tal fine, è il teorema di ricorsività che asserisce che il calcolo delle funzioni produce risultati che ricadono sempre dentro  $\mathbb{N}$ . Ciò appare evidente se rappresentiamo la *Rekursionssatz*, cioè il teorema n. 126, nel modo seguente<sup>8</sup>:

$$\begin{array}{ccc}
 & \psi & \\
 \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\
 S \downarrow & & \downarrow S \\
 \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\
 & \psi & 
 \end{array}$$

$\psi$  e  $S$  sono due *Selbstabbildung*, due funzioni “autoapplicative” il cui dominio e codominio coincidono. Preso un elemento di  $\mathbb{N}$  lo trasformano in un altro elemento di  $\mathbb{N}$ . Inoltre il diagramma mostra un fenomeno importante che potremmo definire di *ricorsività commutativa*, cioè la composizione delle due funzioni in gioco corrisponde alla composizione commutata delle stesse funzioni. Abbiamo quindi due funzioni che a) richiamano sé stesse – e sono perciò *ricorsive* – e che al tempo stesso b) *commutano*. Seguendo l’andamento del diagramma si arriva facilmente a derivare la formula ricorsiva del teorema n. 126:

$$\psi S(x) = S \psi(x)$$

Tutto il lavoro preparatorio che Dedekind svolge nei paragrafi precedenti è la necessaria premessa della formulazione del teorema di ricorsività che permette di definire le operazioni aritmetiche elementari su  $\mathbb{N}$ . Le “tappe” del percorso che conduce alla *Rekursionssatz* sono la proposizione n. 37 (concetto di catena), la n. 71 (insieme dei numeri naturali come catena di 0), e la n. 80 (induzione completa). Da ciò emerge con sufficiente chiarezza che Dedekind non è interessato a definire procedure algoritmiche per le operazioni aritmetiche

Cfr. anche G. Rigamonti, *Introduzione* a G. Cantor, cit., p. XXVIII.

8. Cfr. S. Müller-Stach, cit. p. 41.

quanto piuttosto a trattare quelle operazioni da un punto di vista logico-insiemistico, a fare in modo che esse risultino logicamente coerenti coi principi che reggono il sistema dei numeri naturali. Dedekind fornisce la *definizione logica* della funzione somma non la *procedura algoritmica* utilizzata per calcolarla. Accreditarlo come colui che, persino più di Cantor, avrebbe sviluppato per primo un algoritmo per calcolare l'infinito attuale costituisce una chiara forzatura interpretativa. È evidente che per la tenuta dell'argomentazione di Zellini – in cui Dedekind gioca un ruolo centrale come elemento di *prova* della connessione degli algoritmi con l'infinito – tutto ciò costituisce una seria criticità.

## 2.2 *Le forze oscure del calcolo*

L'altro aspetto – il secondo pilastro argomentativo – è incentrato sui processi di simbolizzazione che caratterizzerebbero le procedure algoritmiche. Zellini, mediante brevi digressioni erudite, mira a far emergere la connessione degli algoritmi con il carattere metafisico-religioso che diverse tradizioni culturali hanno nel tempo attribuito ai numeri. Un caso significativo è dato dal concetto di enumerazione, ben illustrato, ad esempio, in uno dei grandi testi del cosiddetto “canone occidentale”, il *Don Chisciotte* di Cervantes<sup>9</sup>. Il primo capitolo della seconda parte presenta un elenco di nomi di cavalieri erranti: Amadigi di Gaula, Palmerino d'Inghilterra, Tirante il Bianco, Lisuarte di Grecia, Don Belianigi, Perione di Gaula, Felismarte d'Ircania. Pedro Perez, curato di Don Chisciotte, manifesta perplessità sull'esistenza di questi personaggi. Lo stesso Don Chisciotte riconoscerà alla fine di essersi ingannato e di aver immaginato individui inesistenti. Eppure, osserva Zellini (pp. 21-22), riprendendo un vecchio modulo della tradizione classica Cervantes presenta una parodia dei cataloghi omerici che sembravano avere la funzione di introdurre entità nuove nella scena del mondo. L'enumerazione assegna un insieme di oggetti al significato e dunque, in questo senso, li immette nell'esistenza. È dotata di un *potere realizzante* che si attua selezionando una serie di elementi dalla totalità e poi “radunandoli” all'interno di un *elenco*. In questo svolge una funzione analoga a quella del *lógos*, quella di riunire (*léghein*) gli oggetti, mostrarli e farli esistere. Un potere metafisico, analogo a quello che eserciterà Cantor con la creazione dei numeri transfiniti e dell'infinito attuale.

Anche la nascita degli algoritmi sembra avere origini remote (p. 32 e ss.). La parete ovest del palazzo di Festo a Creta è suddivisa secondo una successione che sembra analoga alla successione di Fibonacci; al 1200 a. C. risale una

9. “Canone occidentale”, com'è noto, è una formula dovuta ad Harold Bloom. Cfr. H. Bloom, *Il canone occidentale*.

collezione di pesi per bilancia disposti secondo una progressione che sembra simile alla successione di Fibonacci; nell'India vedica, nel I millennio a. C., si trovano tracce di algoritmi utilizzati per la costruzione degli altari di Agni. Ma si può andare ancora più indietro nel tempo, fino a scorgere nelle tavolette cuneiformi di origine babilonese schemi di calcolo applicati a problemi specifici che prefigurano – è l'opinione di Donald Knut – l'ordine e l'effettività dei moderni algoritmi. Naturalmente, al tempo d'oggi le motivazioni originarie del pensiero algoritmico sono andate perdute. I calcoli vedici erano un corollario dell'esattezza procedurale che contrassegnava i rituali; nell'antica Mesopotamia un insieme di relazioni matematiche legava il calcolo ai ritmi degli astri; i greci, come si può intuire leggendo Platone, leggevano i numeri e la matematica nel firmamento, e ciò accadeva perché i rapporti numerici erano rapporti fra misure di cicli astronomici.

Zellini descrive il processo di “desacralizzazione” degli algoritmi. Si perde il legame con la sfera divina, si disconnette e si disarticola il rapporto con il concetto di infinito; il dominio degli algoritmi definitivamente si spoglia di tutti i presupposti filosofico-sapientziali del calcolo (p. 36). Rimane la realtà positiva, la materialità delle procedure che passano dall'astratto della logica e della matematica al concreto dei calcolatori digitali. Questa transizione è cruciale perché sancisce la rimozione progressiva dell'*effettività* a vantaggio dell'*efficienza*. L'algoritmo nella sua versione astratta si caratterizza per l'effettività, ossia per essere una procedura che porta necessariamente, dopo un numero più o meno lungo di passi, ad un *esito* conclusivo. Tuttavia, nel momento in cui questi calcoli sono implementati in un dispositivo si rende necessario prendere in carico il *costo computazionale*. Non basta che un algoritmo sia effettivo, cioè concludente, ma serve anche che sia *eseguibile* da una macchina in un *tempo ragionevole* e con un numero controllabile e accettabile di *errori*. Il lavoro per ridurre il costo computazionale ha come conseguenza quello di aumentare il livello di *approssimazione* e di *incertezza*. Si giunge così a un paradosso: mentre gli algoritmi, per essere efficienti, si indeboliscono – diventano strutture probabilistiche soggette ad errori – dall'altro appaiono sempre più *credibili* agli occhi dell'uomo<sup>10</sup>. Questa situazione viene interpretata da Zellini, sulla scorta di Norbert Wiener, come una forma di *astuzia mefistofelica*, quasi un progetto operato da entità oscure per assoggettare l'umanità e successivamente procedere alla sua disgregazione (p. 37). L'uomo si affida agli algoritmi perché a) gli permettono di realizzare i suoi scopi e b) perché avverte in essi l'eco di una potenza mitica originaria (p. 88 e ss.). Citando George Mosse, Zellini

10. Il binomio *effettività/efficienza* viene analizzato in modo più esteso in P. Zellini, *Effettività ed efficienza*.

afferma che a) e b) operano *insieme*, che il *mito* e la *realtà* sono due poli dialettici non separabili. Vittima di questa cieca fiducia l'uomo non si avvede che la ricerca dell'*efficienza* progressivamente scalza la sua autonomia e la sua libertà. Qualsiasi risultato di un processo algoritmico – ad esempio, le pagine fornite da un motore di ricerca – è *in apparenza* conforme alle nostre aspettative e ai nostri scopi ma in realtà è sempre più determinato dalle esigenze di efficienza computazionale (pp. 92-93).

Questo discorso presenta due difficoltà. Intanto, relativamente a b), come si è già anticipato, l'effetto metafisico-religioso dell'algoritmo presuppone, per potersi dispiegare, un *riconoscimento diffuso* dei significati simbolici incorporati nel concetto. Ma questo non accade, dato che la conoscenza di quei significati costituisce un sapere specialistico che pochi possiedono e padroneggiano, e non una conoscenza generalista di massa. Lo stesso Zellini, del resto, riconosce (p. 36) che il valore simbolico degli algoritmi non è più avvertito nella società, dunque non si comprende come possa al tempo stesso sostenere ancora il sussistere di quella forma di condizionamento. Riguardo all'efficienza algoritmica poi, c'è da osservare che se essa fosse davvero un obiettivo autoreferenziale della macchina, sempre più sganciato dalle pratiche sociali, non si comprende come gli algoritmi possano essere così ottimamente *funzionali* alla realizzazione degli scopi e delle intenzioni umane. Gli algoritmi permettono di realizzare scopi pratici, forniscono sempre con maggior precisione *ciò che serve* e questo sembra provare a sufficienza che non sono congegni autoreferenziali. La ricerca dell'efficienza non sembra andare a detrimento della funzionalità.

### 2.3 Decisioni e responsabilità

Zellini considera in parte già avvenuto qualcosa di esiziale: la delega incondizionata delle decisioni umane alle macchine calcolanti. Per una serie di ragioni o forse – come suggerisce un pensiero di Novalis – per mera *pigrizia*, gli uomini hanno trovato negli algoritmi lo strumento per *dispensarsi* dal peso lacerante delle decisioni. Finalmente l'uomo realizza, a un certo punto della sua storia, quanto aveva da sempre coltivato nella sua intimità, cioè a dire l'anelito alla subordinazione e la rimozione del peso della libertà. Decidere è difficile, oneroso, è preferibile che se ne occupino quelle "macchine" che hanno peraltro già dato prova di grandi e prodigiose capacità. Il processo di abdicazione dell'umano non è ancora del tutto realizzato ma dai segni che si possono scorgere sembra che esso giungerà in modo inevitabile a un punto culminante in cui la libertà sarà interamente annullata dalle procedure automatiche del calcolo.

Tuttavia, nessun elemento empirico viene portato a sostegno di questa tesi. Nessuna indagine statistica, nessuna ricerca sul campo<sup>11</sup>. Zellini opta per un registro diverso, cerca di mostrare il dominio delle macchine usando l'espressione artistica come chiave metaforica di rappresentazione della realtà (pp. 15-20). L'esempio scelto come paradigma è *Sully*, una pellicola cinematografica del 2016, diretta da Clint Eastwood, che racconta la vicenda del miracoloso ammaraggio di un aereo di linea nel fiume Hudson avvenuto il 15 gennaio del 2009. I fatti sono noti. Pochi minuti dopo il decollo dall'aeroporto di LaGuardia di New York, l'aereo pilotato da Chesley Sullenberger impatta con uno stormo di oche canadesi a quasi tremila metri di quota. I motori si spengono uno dopo l'altro. Il pilota ha pochi secondi per decidere cosa fare: a) tornare a LaGuardia; b) dirigersi verso l'altro aeroporto vicino, quello di Teterboro; c) ammarare sull'Hudson. Quasi immediatamente il capitano Sully capisce che non è più possibile scegliere né a) né b) – l'aereo è troppo basso di quota – e così punta sull'Hudson. Gli ammaraggi comportano sempre un rischio: l'aereo si può spezzare e causare la morte dei passeggeri. Per fortuna ciò non accade: Sully riesce a planare sul fiume senza causare alcun danno: i centocinquanta passeggeri sono tutti salvi.

Si apre subito dopo un'inchiesta del *National Transportation Safety Board* per stabilire se la scelta di atterrare sull'Hudson fosse stata quella più giusta, se davvero il capitano non avesse avuto alternative o se invece non fosse stato possibile tornare a LaGuardia senza mettere inutilmente a rischio la vita dei passeggeri ammarando sul fiume. Le prime simulazioni sviluppate sembrano dar torto al pilota. A questo punto il colpo di scena: Sully chiede di prendere in considerazione il “fattore umano”, cioè i tempi di reazione di un essere umano *non preparato* ad affrontare quella specifica situazione. Tenendo conto di questo scarto, le simulazioni fanno vedere che optando per a) o b) l'aereo sarebbe andato a schiantarsi contro gli edifici vicini ai due aeroporti.

Quello che colpisce Zellini in questa vicenda è il fatto che, in ultima analisi, sono le simulazioni a *scagionare* Sully dall'accusa di condotta negligente e irresponsabile: il giudizio finale del NTSB – è questo il dato per lui decisivo – si fonda *unicamente* su algoritmi che simulano il volo dell'aereo. Il film di Eastwood perciò ben rappresenta, al netto delle forzature “hollywoodiane” della storia – l'inchiesta del NTSB, dipinto come un'istituzione ostile che osa mettere sotto accusa l'eroe Sully, è in realtà un atto dovuto, previsto dai regolamenti: dall'esame di un evento così insolito si possono apprendere informazioni essenziali per migliorare i livelli di sicurezza dei voli, come peraltro lo

---

11. Vengono menzionati come unico supporto empirico i materiali presenti nel testo S. U. Noble, *Algorithms of Oppression* – che però è limitato ai condizionamenti operati dai motori di ricerca.

stesso Chesley Sullenberger riconobbe in diverse interviste televisive successive all'incidente –, quello che Zellini ha in mente, l'idea degli algoritmi come *entità totemiche* cui la società umana si appresta a consegnare quello che più la contraddistingue: il giudizio, la scelta, la responsabilità, la libertà.

Tuttavia questa storia non sembra provare quanto auspicato. Le simulazioni utilizzate dal NTSB svolgono la funzione di mero *supporto decisionale*: sono usate *nel* processo decisionale ma non *costituiscono*, o *sostituiscono*, il processo decisionale. La richiesta di Sully di prendere in considerazione il fattore umano apre di fatto la *possibilità* dell'ulteriore verifica mediante *nuove simulazioni* le quali, a quel punto, dimostrano la correttezza della scelta del comandante. Le simulazioni dunque non agiscono come *entità logiche isolate* ma stanno all'interno di una *rete discorsiva* in cui vengono usate come elementi di un "gioco" speciale, il gioco, per citare Robert Brandom, del dare e chiedere ragioni (*giving and asking reasons*), del *cosa* è una ragione per *cosa*<sup>12</sup>. La funzione logica della simulazione algoritmica viene perciò individuata in base al *ruolo inferenziale* che essa svolge nel contesto di una specifica *pratica linguistica* – nel caso in specie, l'indagine conoscitiva del NSTB. Zellini intravede il limite dei calcoli algoritmici: anche in presenza dei più sofisticati meccanismi si è costretti a rimandare a qualcosa che sta al di fuori del loro meccanismo, *l'umano* nelle sue forme essenziali (p. 15). Ma, piuttosto che partire da questo aspetto per relativizzare gli algoritmi e riconoscere che il "lavoro" che essi svolgono presuppone necessariamente l'esistenza di soggetti coscienti capaci di azione e linguaggio, interpreta la vicenda di Sully come la concretizzazione di uno scenario in cui sembra attuarsi qualcosa di esiziale: la matematica e la vita si intrecciano, si confondono e diventano indistinguibili (*Ibidem*).

#### 2.4. Due problemi ontologici

Le aporie fin qui segnalate trovano la loro radice nella non sufficiente elaborazione del problema ontologico, che si articola su due livelli: a) informatico-computazionale e b) sociale. Nel libro di Zellini gli algoritmi figurano come *entità indipendenti*, in parte rispetto ad a) ma soprattutto rispetto a b).

*Livello a)*. I modi oggi in uso per descrivere l'architettura di un sistema computazionale sono due: i) la divisione *software/hardware* (HS) e ii) il metodo dei *livelli di astrazione* (LoA)<sup>13</sup>. Al di là delle questioni di validità dei due approcci ontologici presenti sul campo – ad esempio si tende a disconoscere valore teorico alla distinzione *software/hardware* ritenendola utile solo per fini

12. Per uno sviluppo del tema si veda R. Brandom, *Articolare le ragioni*.

13. Cfr. N. Angius, G. Primiero, R. Turner, *The Philosophy of Computer Science*.

pratici – si può osservare come sia rispetto a i) che rispetto a ii) gli algoritmi non godano di *totale* indipendenza ontologica. Zellini è consapevole del carattere ibrido delle procedure di calcolo: sono *astratte*, in quanto procedure logiche e in quanto calcoli numerici, e al tempo stesso *materiali* in quanto implementati nelle macchine. Questa visione però non tiene conto del fatto che gli algoritmi nella *computer science* sono concepiti ontologicamente come *processi integrati* nell'architettura complessiva del sistema. L'algoritmo in quanto meccanismo logico-matematico ha una sua autonomia concettuale (si pensi alla macchina di Turing) ma, in quanto meccanismo computazionale, è un elemento di un sistema. In modo più esplicito questo tratto emerge nell'ontologia LoA, in cui le procedure algoritmiche sono la descrizione *a un certo livello* del sistema computazionale. Ma anche nell'approccio HS gli algoritmi sono connessi in modo stabile alla struttura del sistema. Ciò si può desumere anche dal fatto che ogni lavoro di programmazione ben calibrato è sviluppato tenendo conto, sin dall'inizio, dell'architettura degli elaboratori di calcolo: algoritmi e linguaggi di programmazione, anche di alto livello, sono pensati in funzione dell'*hardware* che li eseguirà – un buon *software designer* otterrà risultati migliori se nel suo lavoro sarà consapevole delle caratteristiche dell'*hardware*: un esempio, il funzionamento dei *sorting algorithm*, tanto più efficace quanto più il progettista sarà stato consapevole della struttura della macchina esecutrice. Al tempo stesso anche la progettazione di microprocessori spesso è modellata in funzione dei programmi che dovranno essere eseguiti<sup>14</sup>.

La categoria dell'efficienza algoritmica, ben illustrata da Zellini, rende conto della natura intermedia – fra astrazione e materialità – degli algoritmi ma lascia fuori questi importanti aspetti di connessione e interdipendenza, facendo apparire l'algoritmo ontologicamente più autonomo di quanto non sia. In realtà *hardware* e *software* condividono la stessa filosofia di fondo, la suddivisione di un problema in sottoproblemi, la risoluzione di essi, e quindi la soluzione del problema iniziale – il cosiddetto *divide et impera*<sup>15</sup>. Di qui discende la visione integrata del sistema computazionale come un'entità unica.

*Livello b.* È anche, e soprattutto, rispetto a questo livello ontologico che il testo di Zellini risulta in particolar modo carente. Rifacendoci alle note distinzioni tracciate da John Searle possiamo affermare che entità come gli algoritmi rientrano nella categoria dei fenomeni ontologicamente *soggettivi*,

14. Intel, Motorola e altri produttori realizzarono, alla fine degli anni novanta, dei microprocessori in funzione del fatto che i programmi in futuro avrebbero eseguito sempre di più *video games*, film e *video clip*. Il risultato di quella scelta è che oggi molti microprocessori contengono *hardware* speciali in grado di processare i video. Cfr. Y. N. Patt, S. J. Patel *Introduction to Computing System. From Bits and Gates to C and Beyond*, pp. 8-9.

15. Ivi, pp. 289-290.

ossia *observer-relative* – a fronte di fenomeni come le molecole, le montagne o le placche tettoniche che sono invece ontologicamente *oggettivi*, ossia *observer-independent*<sup>16</sup>. I fenomeni *observer-relative* sono tali perché è la *coscienza collettiva* degli individui il fattore *costitutivo* della loro esistenza. Una banconota da venti euro possiede due livelli ontologici: a) un livello ontologicamente *oggettivo* – è un pezzo di carta – e b) un livello ontologicamente *sogettivo*, il suo valore riconosciuto dalla collettività. Searle parla in questo caso di *assegnazione condivisa* di una Funzione di *Status* (*Status Function*). Nel caso della banconota la Funzione di *Status* – assegnata da una serie di *azioni linguistiche* operanti nel campo degli ordinamenti giuridici (la Carta costituzionale, la Banca centrale, il complesso delle norme che regolano i tassi di interesse, i meccanismi finanziari, i principi generali dell'economia) – consiste nel suo valore di scambio, nell'essere un valore *potenziale* che un Soggetto A (*cosciente* di possederlo) trasferisce a un Soggetto B (*cosciente* di acquisirlo) in cambio di un valore *attuale* (la merce: poniamo, l'ultimo libro di Searle). Entrambi gli individui condividono una serie di impegni e presupposizioni che prende origine da quella struttura che Searle chiama *intenzionalità collettiva*, e che rappresenta l'espressione dei meccanismi sociali di cooperazione e coordinamento<sup>17</sup>. Analogamente, gli algoritmi sono entità che hanno, oltre a una dimensione ontologicamente oggettiva – es. il foglio di carta su cui è stampato il diagramma di flusso che schematizza l'algoritmo o le unità aritmetico-logiche che eseguono le operazioni – una ontologicamente soggettiva: esistono in quanto tali solo perché vi è una comunità di individui – una intenzionalità collettiva – che *riconosce* la validità dei risultati che essi producono e *si impegna* ad accettare le conseguenze che ne derivano<sup>18</sup>. Sono quindi fenomeni *observer-relative* dotati di specifi-

16. Cfr. J. Searle, *Il mistero della realtà*, pp. 14-17.

17. La capacità naturale di cooperare per uno scopo conformando ad esso le proprie individuali intenzioni costituisce l'intenzionalità collettiva. Nel caso di un gioco di squadra, ad esempio, è l'intenzionalità collettiva tendente a uno scopo – la sconfitta della squadra avversaria – che ha la capacità di motivare individualmente, di muovere i corpi per mezzo delle intenzioni individuali. Da questi meccanismi naturali di cooperazione derivano le entità sociali come le istituzioni che l'intenzionalità collettiva realizza mediante lo strumento del linguaggio. Ci possono essere, è ovvio, soggetti che *divergono* dagli standard dell'intenzionalità collettiva, che ad esempio non rispettano le regole di un gioco o che non riconoscono l'esistenza di una istituzione. Sono, dice Searle, gli "agenti passivi dell'intenzionalità", soggetti che si discostano da *certe* intenzioni comuni ma che non possono tuttavia distaccarsi da *tutte* contemporaneamente. Per un approfondimento si veda J. Searle, *Coscienza, linguaggio, società*, pp. 102-135.

18. Naturalmente, ad un altro livello di analisi, anche le entità ontologicamente oggettive di Searle *dipendono* dalla soggettività nel senso che in ultima analisi è il sapere condiviso che 'costituisce' la dimensione dell'oggettività nel suo complesso. L'esistenza della terra e delle placche tettoniche o il fatto che l'acqua bolle a 100 gradi sono verità oggettive nel senso che la loro esistenza come oggetti o proposizioni scientifiche vere è resa possibile dall'esistenza di una comunità umana che condivide una peculiare struttura del sapere, che si è sviluppata nel corso di un ben delimitato arco

che Funzioni di *Status* assegnate loro dalla collettività mediante il meccanismo delle regole costitutive. Gli algoritmi sono *intrinsecamente* algoritmi solo in quanto posseggono una Funzione di *Status*, cioè a dire una precisa *funzione logica* nelle pratiche inferenziali e cooperative della vita ordinaria. Purtroppo, questo aspetto fondamentale non è presente nel resoconto offerto da Zellini.

### 3. *Un'anomalia editoriale*

Per concludere, una considerazione sul testo dal punto di vista editoriale. Un lavoro come *La dittatura del calcolo*, inserito in una collana destinata ad un pubblico non specializzato – la *Piccola Biblioteca Adelphi* – rappresenta un'anomalia. Vero è che è nello stile di *Adelphi* offrire ai lettori una mescolanza di testi che spaziano dalla mistica alla letteratura, dalla storiografia alla psicanalisi fino alla fisica teorica. I testi scientifici però, quando il discorso assume un carattere troppo tecnico, vengono accolti di solito nella collana più specializzata *Biblioteca scientifica*. O, come accade con il recente volume di Carlo Rovelli, *Relatività generale*, nella nuova collana *Lezioni di scienza*. *La dittatura del calcolo*, pur non avendone l'aspetto perché presentato nella forma più distesa e informale del saggio letterario, è un testo ad elevato contenuto tecnico. Senza una conoscenza della matematica e della filosofia della matematica sviluppatasi tra la fine dell'ottocento e, grosso modo, gli anni sessanta del novecento il discorso che vi si svolge risulta essere poco decifrabile. Queste sono solo alcune delle nozioni tecniche che compaiono fuggacemente:

- Calcolo matriciale
- Autovalori
- Proprietà spettrale di una matrice
- Tensore

---

cronologico e che ha assunto una precisa articolazione come *sensu comune* e *conoscenza scientifica*. Scrive Wittgenstein: "Che noi siamo perfettamente sicuri di questa cosa [che la terra esiste ed è rotonda o che l'acqua bolle a 100 gradi; *ndr*], non vuol dire soltanto che ciascun individuo è sicuro di quella cosa ma che apparteniamo a una comunità che è tenuta insieme dalla scienza e dall'educazione (corsivo nostro)". Cfr. L. Wittgenstein, *Della certezza*, p. 47. La metafisica di Searle, da questo punto di vista, risulta essere incompleta proprio nella misura in cui, trascurando il ruolo trascendentale della soggettività e della storicità, sembra presupporre la possibilità di uno 'sguardo da nessun luogo' da cui poter descrivere ultimativamente la realtà così com'è (cfr. sul punto G. Vattimo, *Della realtà*, pp. 83-96). Pertanto, se a livello empirico-naturalistico (quello in cui si muove Searle) è possibile tracciare una distinzione fra entità *observer-independent* e *observer-relative* possiamo ben dire che sul piano trascendentale nessun ente può esser definito *mind-independent*.

- Forme bilineari
- Trasformata di Fourier
- FFT (*Fast Fourier Transform*)

Per tentare di porre rimedio vengono aggiunte in appendice delle note esplicative di alcune nozioni tecniche (Successione di Fibonacci, Metodo diagonale di Cantor, la funzione somma di Dedekind, l'Algoritmo di Newton, la Trasformata Discreta di Fourier). Ma si tratta di pagine che a) si limitano a trattare solo *alcuni* dei concetti matematici impiegati e che b) pur volendo essere chiarificatrici relativamente alle nozioni trattate, continuano a impiegare nozioni tecniche complesse non definite. Ad esempio, nell'illustrare la Trasformata Discreta di Fourier, di cui in modo cursorio parla nell'ultimo capitolo, Zellini scrive:

La Trasformata Discreta di Fourier, utile in numerosissime applicazioni, è definita dal prodotto di una matrice  $F$  di  $n$  righe e  $n$  colonne per un vettore, dove  $F$  ha per elemento di posto  $(i, j)$  il numero  $w^{ij}$ , dove  $w$  è una radice principale  $n$ -ma dell'unità nel campo complesso, e  $i$  e  $j$  variano da 0 a  $n-1$ . Il prodotto di una matrice qualsiasi  $A$  per un vettore richiederebbe di solito  $n^2$  operazioni moltiplicative ma la matrice di Fourier ha una struttura speciale che consente di ridurre radicalmente la complessità (p. 169).

Nel capitolo 16 (p. 149) Zellini aveva introdotto la Trasformata Discreta di Fourier e aveva fatto riferimento, subito dopo, alla FFT (*Fast Fourier Transform*); in particolare veniva menzionato l'algoritmo, scoperto da Cooley e Tukey nel 1965, che permette di velocizzare il calcolo: da un numero di operazioni proporzionale a  $n^2$  si passa a un numero proporzionale a  $n \log n$ . Tuttavia nessun cenno viene fatto – né nel testo, né nella nota esplicativa – alla natura matematica della Trasformata di Fourier, né viene presentato l'esempio classico della sua applicazione – la digitalizzazione dei segnali acustici – che sarebbe stato utile per comprenderne il funzionamento. Né si dice alcunché su come la Trasformata di Fourier *diventi* la Trasformata *Discreta* di Fourier – cioè come avviene la discretizzazione (il passaggio dal continuo al discreto) di questo operatore funzionale – e dunque come si pongano le basi per la digitalizzazione (cfr. Lo Buglio, 2014). Si lascia il lettore in balia di sé stesso. In definitiva, la collocazione editoriale, da una parte, e la stringatezza espressiva, dall'altra, rendono il testo poco decifrabile dal pubblico cui esso si rivolge.

*Riferimenti bibliografici*

- Angius N., Primiero G., Turner R., *The Philosophy of Computer Science*, SEP, 2021; <https://plato.stanford.edu/entries/computer-science/#Algo>
- Ausiello G., Petreschi R. (eds), *The Power of Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2013.
- Barassi V., *I figli dell'algoritmo*, Luiss University Press, Roma 2021.
- Bloom H., *Il canone occidentale*, Rizzoli, Milano 2008.
- Bostrom N., *Superintelligenza*, Boringhieri, Torino 2018.
- Brandom R., *Articolare le ragioni*, Il Saggiatore, Milano 2002.
- Cantor G., *La formazione della teoria degli insiemi*, Sansoni, Firenze 1992.
- Davis M., *Il calcolatore universale*, Adelphi, Milano 2003.
- Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen?*, Vieweg, Braunschweig 1888; ora in S. Müller-Stach, pp. 49-109.
- Ferreirós J., *On the Relation between Georg Cantor and Richard Dedekind*, «Historia Mathematica», n. 20, 1993, pp. 343-363; On line: <https://core.ac.uk/download/pdf/82118851.pdf>
- Giusti E., *Analisi matematica 1*, Boringhieri, Torino 1985.
- Harel D., Feldman Y., *Algoritmi*, Springer-Verlag Italia, Milano 2008.
- Knut D. E., *The Art of Computer Programming. Vol 1: Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley, Boston 1997.
- Lo Buglio D., *La trasformata veloce di Fourier (FFT): analisi e implementazione in C++*, Università di Bologna – Corso di laurea in fisica, Tesi di laurea, AA. 2014-2015; [https://amslaurea.unibo.it/8866/1/lobuglio\\_dario\\_tesi.pdf](https://amslaurea.unibo.it/8866/1/lobuglio_dario_tesi.pdf)
- Lolli G., *Dedekind filosofo della matematica*, «Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana», Serie 1, Vol. 2 (2017), n. 1, p. 5–16.
- MacCormick J., *9 Algoritmi che hanno cambiato il mondo*, Apogeo, Milano 2013.
- Ord T., Kieu T. D., *The Diagonal Method and Hypercomputation*, «British Journal for Philosophy of Science», Vol. 56, 2005, pp. 147-156.
- Müller-Stach S., (Hrsg.), Dedekind R., *Was sind und was sollen die Zahlen? – Stetigkeit und Irrationale Zahlen*, Springer-Verlag GmbH, Berlin, 2017
- Noble S. U., *Algorithms of Oppression*, New York University Press, New York 2018.

- Pasquale F., *The Black Box Society*, Harvard University Press, Cambridge 2015.
- Patt Y. N., Patel S. J., *Introduction to Computing System. From Bits and Gates to C and Beyond*, McGraw-Hill, New York 2004.
- Rigamonti G., *Introduzione a Cantor* (1992), pp. V-XL.
- Russell B., *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton, Milano 1995.
- Searle J., *Coscienza, linguaggio, società*, Rosenberg&Sellier, Torino 2009.
- Searle J., *Il mistero della realtà*, Cortina, Milano 2019.
- Vattimo G., *Della realtà*, Garzanti, Milano 2012.
- Wittgenstein L., *Della Certezza*, Einaudi, Torino 1999.
- Zach R., *Hilbert'Program*, SEP, 2003;  
<https://plato.stanford.edu/entries/hilbert-program/>
- Zellini P., *Breve storia dell'infinito*, Adelphi, Milano 1980.
- Zellini P., *Effettività ed efficienza*, «Paradigmi: rivista di critica filosofica», n. 3/2011, pp. 73-87.